数理解析研究所講究録
552巻 1985年 36-42

W^*-力学系のコンパクト群拡大について

熊本大理 岡 幸正 (Yukimasa OKA)

力学系のコンパクト群拡大の非可換化を考察する。まず，エルゴード的W^*-力学系のコンパクト群拡大がエルゴード的であるための必要十分条件を与え，次にW^*-力学系のコンパクト群拡大を構成し，この例へ応用する。

1．M をフォン・ノイマン環，φ を M 上の忠実，正則な状態とし，$L^2(M,\varphi)$ を内積 $(x|y)_\varphi=\varphi(y^*x)$ による M の完備化とする。M の自己同形写像 α が状態 φ を保存するとき，(M,φ,α) を(不変)W^*-力学系という。W^*-力学系(N,ψ,β) が (M,φ,α) と同値であるとは M から N への同形写像 Φ が存在して $\varphi=\psi\circ\Phi$，$\alpha=\Phi^{-1}\circ\beta\circ\Phi$ をみたすときをいう。U を $Ux=\alpha(x)$ $(x\in M)$ によって定義される $L^2(M,\varphi)$ 上のユニタリー作用素とする。フォン・ノイマン環 M はヒルベルト空間

$L^2(M,\varphi)$ 上で作用するフォン・ノイマン環と自然に同一視できる。$M^\alpha=\{x\in M\mid \alpha(x)=x\}=\mathbb{C}1$ のとき（或いは $L^2(M,\varphi)^U=\{\xi\in L^2(M,\varphi)\mid U\xi=\xi\}=\mathbb{C}1$ のとき），(M,φ,α) はエルゴード的であるという。σ をコンパクト可換群 G の M 上の連続な作用とし，$\varphi\circ\sigma_g=\varphi$ $(g\in G)$ をみたすとする。(M,φ,α) が W^*-力学系で，G のある自己同形写像 κ に対して $\sigma_g\circ\alpha=\alpha\circ\sigma_{\kappa(g)}$ $(g\in G)$ をみたすならば，α は M の作用 σ による不動点部分環 M^σ の自己同形写像 $\alpha|M^\sigma$ をひきおこす。この $\alpha|M^\sigma$ は状態 $\varphi|M^\sigma$ を保つ。W^*-力学系 (N,ψ,β) が $(M^\sigma,\varphi|M^\sigma,\alpha|M^\sigma)$ と同値であるとき，(M,φ,α) は (N,ψ,β) の κ による (G,σ)-拡大であるという。Γ を G の双対群とする。$\gamma\in\Gamma$ が G の自己同形写像 κ に関して n-周期的であるとは $\gamma\kappa\neq\gamma,\cdots,\gamma\kappa^{n-1}\neq\gamma$，かつ $\gamma\kappa^n=\gamma$ をみたすときをいう。

2. W^*-力学系のコンパクト可換群拡大のエルゴード性の判定条件として，次の結果が得られる。

定理 1. (M,φ,α) をあるエルゴード的 W^*-力学系の G の自己同形写像 κ による (G,σ)-拡大とする。このとき，(M,φ,α) がエルゴード的でないための必要十分条件は

自然数 n, K に関して n-周期的な $\gamma\in\Gamma$, $\gamma\neq 1$ 及び $\xi_\gamma\in L^2(M,\varphi)$, $\xi_\gamma\neq 0$ が存在して

$$U^n\xi_\gamma=\xi_\gamma,\quad U_g\xi_\gamma=\langle g,\gamma\rangle\xi_\gamma\ \ (g\in G)$$

をみたすことである。ここに U, U_g は $Ux=\alpha(x)$, $U_gx=\sigma_g(x)$ $(x\in M)$ によって定義される $L^2(M,\varphi)$ 上のユニタリー作用素である。

この定理の証明は次の補題による.

補 題 1. (M,φ,α) を W^*-力学系, σ をコンパクト可換群 G の M 上への連続な作用とし, G のある自己同形写像 K に対して

$$\varphi\circ\sigma_g=\varphi,\quad \sigma_g\circ\alpha=\alpha\circ\sigma_{K(g)}\ \ (g\in G)$$

をみたすとする。$\mathcal{V}_\gamma$ $(\gamma\in\Gamma)$ は $U_g\xi=\langle g,\gamma\rangle\xi$ $(g\in G)$ をみたす $\xi\in L^2(M,\varphi)$ 全体とする。このとき

(1) $\quad L^2(M,\varphi)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\oplus\mathcal{V}_\gamma$

(2) $\quad \xi\in\mathcal{V}_\gamma$ ならば $U\xi\in\mathcal{V}_{\gamma K}$.

3. 次に W^*-力学系のコンパクト可換群拡大を構成し, この例のエルゴード性の判定に定理1を応用する.

(M,φ,α) を W^*-力学系とし, U を $Ux=\alpha(x)$ $(x\in M)$ に

よって定義される $\mathcal{H}_\varphi = L^2(M,\varphi)$ 上のユニタリー作用素とする．M を $\mathcal{H}_\varphi$ 上で作用するフォン・ノイマン環と自然に同一視する。G をコンパクト可換群，Γ をその双対群とする。κ を G の自己同形写像，θ を Γ の M 上への作用，u を Γ から M のユニタリー群 M^u の中への写像で条件 $u_{\gamma\gamma'} = u_\gamma \theta_{\gamma\kappa}(u_{\gamma'})$ ，$\alpha \circ \theta_\gamma = \mathrm{Ad}\, u_\gamma \circ \theta_{\gamma\kappa} \circ \alpha$ $(\gamma, \gamma' \in \Gamma)$ をみたすとする。$l^2(\mathcal{H}_\varphi, \Gamma)$ 上のユニタリー作用素 $\widetilde{U}$ を $\xi \in l^2(\mathcal{H}_\varphi, \Gamma)$ に対し，$(\widetilde{U}\xi)(\gamma) = \theta_{\gamma^{-1}}(u_{\gamma\kappa^{-1}}) U \xi(\gamma\kappa^{-1})$ $(\gamma \in \Gamma)$ によって定義する。このとき

補題 2. $\widetilde{\alpha} = \mathrm{Ad}\,\widetilde{U}$ は $M \times_\theta \Gamma$ の自己同形写像である．ただし $M \times_\theta \Gamma$ は M の θ に関する Γ による接合積である。

補題 3. σ を G 上の θ の双対作用とする。このとき，$\sigma_g \circ \widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha} \circ \sigma_{\kappa(g)}$ $(g \in G)$．

補題 4. ε を $\varepsilon(\widetilde{x}) = \pi_\theta^{-1}\left(\int_G \sigma_g(\widetilde{x})\,dg\right)$ によって定義される $\widetilde{M} = M \times_\theta \Gamma$ から M 上への条件付期待値とし，$\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \varepsilon$ とする．このとき，$\widetilde{\varphi}$ は $\widetilde{M}$ 上の忠実，正則状態で，σ 及び $\widetilde{\alpha}$ に関して不変である．

以上より　次の結果を得る。

定理 2. $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\alpha})$ は (M, φ, α) の K に関する (G, σ)-拡大である。

定理1の応用として　次の結果を得る。

定理 3. (M, φ, α) をエルゴード的 W^*-力学系とし、$(\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\alpha})$ を上のような (M, φ, α) の K に関する (G, σ)-拡大とする。このとき $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\alpha})$ がエルゴード的でないための必要十分条件は 自然数 n, K に関して n-周期的な $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$ 及び $\xi \in L^2(M, \varphi)$, $\xi \neq 0$ が存在して

$$U^n \xi = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i-1}(u_{\gamma K i}) \xi$$

をみたすことである。ただし $\prod_{i=0}^{n-1} a_i = a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$。

この定理の証明は定理1及び次の補題による。

補題 5. $\tilde{U}$, $\tilde{U}_g$ を $\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{\alpha}(\tilde{x})$, $\tilde{U}_g \tilde{x} = \sigma_g(\tilde{x})$ $(\tilde{x} \in \tilde{M})$ によって定義される $L^2(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ 上のユニタリー作用素とする。n を自然数とし，$\gamma \in \Gamma$ を $\gamma \neq 1$, K に関して n-周期的とする。このとき，次の条件は同値である。

(i) $\xi \in L^2(M,\varphi)$, $\xi \neq 0$ が存在して

$$U^n \xi = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i-1}(u_{\gamma\kappa^i})\xi$$

をみたす。

(ii) $\xi_\gamma \in L^2(\tilde{M},\tilde{\varphi})$, $\xi_\gamma \neq 0$ が存在して

$$\tilde{U}^n \xi_\gamma = \xi_\gamma, \quad \tilde{U}_g \xi_\gamma = \langle g,\gamma \rangle \xi_\gamma \quad (g \in G)$$

をみたす。

定理3から次のことが直ちに従う。

系 1. κ が恒等的ならば，$(\tilde{M},\tilde{\varphi},\tilde{\alpha})$ がエルゴード的である必要十分条件は，$\gamma \in \Gamma$, $\xi \in L^2(M,\varphi)$ に対して $U\xi = u_\gamma \xi$ ならば $\gamma = 1$ または $\xi = 0$ をみたすことである。

系 2. 作用 θ が $u_\gamma = \mathrm{Ad}\,U(W_\gamma)W_{\gamma\kappa} \in M$ $(\gamma \in \Gamma)$ をみたす Γ の $L^2(M,\varphi)$ 上へのユニタリー表現 W によって引きおこされるとき，$(\tilde{M},\tilde{\varphi},\tilde{\alpha})$ がエルゴード的であるための必要十分条件は 任意の $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$ に対して，γ が κ に関して非周期的であることである。

[1] Oka, Y., On a compact abelian group extension of

a W^*-dynamics, to appear in Kumamoto J. Sci. (Math.), no. 2, vol. 16 (1985).

[2] Osikawa, M., Notes on minimality and ergodicity of compact abelian group extension of dynamics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 13 (1977), 159-165.